

Les exercices 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 19 et 20 sont plus abordables que le reste. Les exercices 1, 7, 12, 21, 29, 32 et le problème 1 sont à traiter en priorité. J'insiste tout particulièrement sur l'exercice 12.

1 Développements limités

Exercice 1 : Développements limités à l'ordre 1

Effectuer les développements limités suivants à l'ordre 1 (au voisinage de 0 sauf précision du contraire) :

1. $\frac{1}{1+x}$
2. $\frac{1}{z}$ au voisinage de $a \neq 0$ fixé
3. $\cos(\theta)$ au voisinage de θ_{eq}
4. e^{x^2} au voisinage de 1
5. e^u au voisinage de u_0 .
6. $\frac{1}{(1+x)^{3/2}}$
7. $\frac{1}{z^4}$ au voisinage de a
8. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
9. $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 2

Exercice 2 : Solution approchée

On cherche à résoudre l'équation transcendente suivante :

$$k \frac{\cos(x)}{1-x^2} = x$$

en x , avec $k = 0.1$. Quelle hypothèse est-il alors naturel de faire sur l'ordre de grandeur de x ? En déduire une solution approchée de l'équation. Comparer le résultat avec une solution obtenue par une méthode numérique.

Exercice 3 : Pression dans une salle

1. Estimer la hauteur typique h d'une salle de classe. Estimer également la température typique T d'une salle de classe (attention à bien utiliser des unités SI).

Si on fait l'hypothèse que l'air est un gaz parfait et que la température est constante en fonction de la position, la pression à une hauteur z du sol vaut :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

Avec $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, la masse molaire de l'air, et $P_0 = 1013 \text{ hPa}$

2. On pose $H = \frac{RT}{Mg}$. Montrer que H est homogène à une hauteur, et calculer sa valeur. En déduire une expression approchée de $P(z) - P_0$.
3. Quelle erreur relative fait-on en considérant que la pression est uniforme dans une salle de classe ?

Exercice 4 : Champ de gravité terrestre

À quelle hauteur doit-on se placer pour que l'intensité du champ de gravité terrestre ait varié d'un pourcent par rapport à sa valeur au niveau du sol ?

Exercice 5 : Point de Lagrange

3 des 5 points de Lagrange du système Terre-Soleil sont situés sur l'axe Terre Soleil. On cherche donc des points sur cet axe tels que la somme des forces gravitationnelles et d'inertiel s'annule ; on obtient alors l'équation suivante sur d la distance Soleil-point de Lagrange :

$$0 = -\frac{GM_S m}{d^2} + \frac{GM_T m}{(D-d)^2} + m\Omega^2 d$$

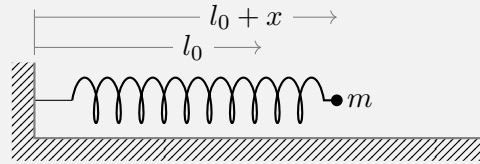
où D est la distance Terre-Soleil et $\Omega^2 = \frac{GM_S}{D^3}$

1. En déduire une relation uniquement entre les paramètres adimensionnés $\alpha = M_T/M_S$ et $x = d/D$.
2. Numériquement on trouve $x = 0.989$. Quelle approximation peut-on donc raisonnablement faire ? En déduire une expression théorique approchée de x .

2 L'oscillateur harmonique en mécanique

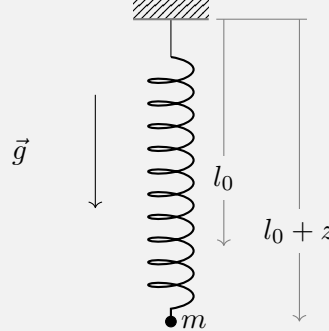
Exercice 6 : Le système masse ressort

- On considère une masse m reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements sur une table :



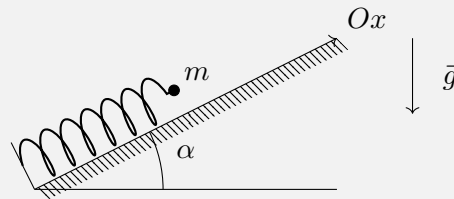
On repère sa position par la variable x . Déterminer l'équation différentielle du mouvement, la résoudre dans le cas $x(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = v_0$.

- On suspend cette fois cette masse au plafond, elle est donc à la verticale :



Établir l'équation différentielle du mouvement, la résoudre dans le cas $z(t=0) = z_0 + \frac{mg}{k}, \dot{z}(t=0) = 0$.

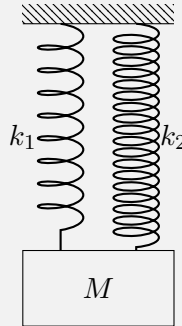
- On place cette fois la masse et le ressort sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Établir l'équation différentielle du mouvement, et la résoudre dans le cas $x(t=0) = l_0, \dot{x}(t=0) = 0$.

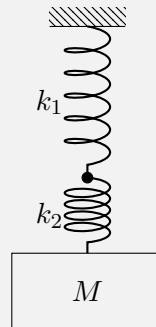
Exercice 7 : Ressorts équivalents

1. On considère deux ressorts de longueur à vide l_0 et de raideurs respectives k_1 et k_2 . On suppose qu'ils sont associés en parallèle et attachés tous deux à un même solide de masse M .



Montrer que ces deux ressorts sont équivalents à un seul ressort de longueur à vide l_0 de raideur $k_{eq} = k_1 + k_2$. En déduire une formule pour calculer la raideur équivalente pour un ensemble de n ressorts en parallèle de raideurs respectives k_1, k_2, \dots, k_n et de longueur à vide l_0 .

2. On suppose désormais que ces deux ressorts sont associés en série, c'est-à-dire attachés les uns à la suite des autres, on suppose que l'attache est de masse nulle, et on prend désormais les longueurs à vide des deux ressorts, l_1 et l_2 différentes.



Montrer que ces deux ressorts sont équivalents à un seul ressort de longueur à vide $l_0 = l_{01} + l_{02}$ et de raideur $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. En déduire une formule pour calculer la raideur équivalente et la longueur à vide équivalente pour un ensemble de n ressorts en parallèle de raideurs respectives k_1, k_2, \dots, k_n et de longueurs à vide l_1, l_2, \dots, l_n .

Ces deux résultats sont à connaître.

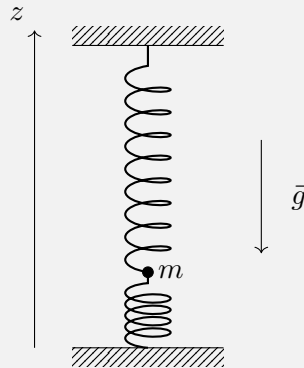
Exercice 8 : Élastique coupé en deux (tiré du test de présélection des IPhOs 2006)

Un élastique (boucle en caoutchouc) est assimilé à un ressort. Il possède une constante de raideur k qui vaut 10N m^{-1} . On coupe la boucle. Quelle est la constante de raideur du nouvel objet ?

1. 20N m^{-1}
2. 5N m^{-1}
3. 2.5N m^{-1}
4. 10N m^{-1}

Exercice 9 : Ressorts et gravité

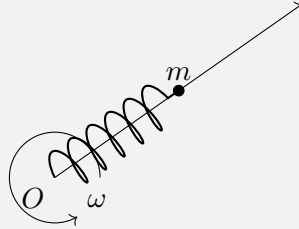
Une masse m est astreinte à se déplacer verticalement entre 2 plans distants de $2L$. Elle est reliée à deux ressorts de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .



1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. En déduire la position d'équilibre z_{eq} .
3. Réécrire l'équation vérifiée par z , uniquement à l'aide \ddot{z} , z , z_{eq} et ω_0 la pulsation propre du système.
4. La résoudre en supposant qu'à $t = 0$, z et \dot{z} sont nuls.

Exercice 10 : Bille sur une tige en rotation

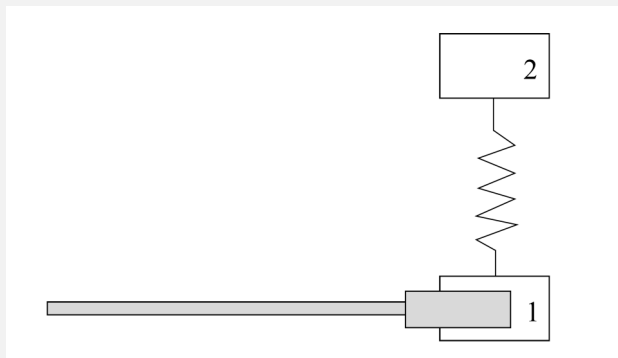
Une tige rectiligne tourne dans le plan de l'horizontale à vitesse angulaire constante ω . Une bille de masse m est fixée dessus et peut y coulisser librement sans frottements. Elle est liée à l'origine de la tige par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k .



1. Quel système de coordonnées semble être le plus adapté ?
2. Établir l'équation différentielle du mouvement. Montrer que deux régimes sont possibles, et les caractériser par une condition sur les paramètres du système.
3. Résoudre l'équation différentielle du mouvement dans les deux régimes pour une situation initiale où la bille a une vitesse v_0 le long de la tige, et part d'une distance l_0 de l'origine de la tige.

Exercice 11 : Ressort et pince (tiré du test de présélection des IPhOs 2015)

On considère deux corps de même masse, reliés par un ressort idéal de raideur k . Le corps 1 est initialement tenu immobile par une pince et le corps 2 est en équilibre à la verticale du corps 1. On écarte brusquement les bras de la pince. Quelles sont les normes des accélérations respectives a_1 et a_2 des deux corps juste après avoir écarté les deux bras de la pince ?



1. $a_1 = a_2 = g$
2. $a_1 = g, a_2 = 0$
3. $a_1 = 2g, a_2 = 0$
4. $a_1 = 2g, a_2 = g$

Exercice 12 : Oscillateurs harmoniques couplés

Cet exercice demande d'avoir lu le début du bonus 5.1.1 sur la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1 à couplage symétrique.

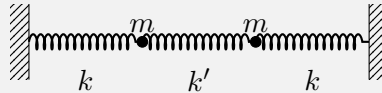
Soient deux murs se faisant face, distants de $3l_0$. Soient deux mobiles M_1 et M_2 , de même masse m . M_1 est fixé au premier mur par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . M_2 est fixé au deuxième mur de la même manière. Entre M_1 et M_2 on place un troisième ressort, de constante de raideur k' et de longueur à vide l_0 . On repère la position des mobiles par leur abscisse x , qui correspond à leur distance au premier mur.

1. Faire un schéma. Que valent x_{1eq} et x_{2eq} ?
2. Établir les équations différentielles couplées sur x_1 et x_2 . Faire apparaître ω_0 la pulsation de résonance des oscillateurs découplés.
3. Découpler ces équations en introduisant de nouvelles variables bien choisies. On fera apparaître une nouvelle pulsation, ω_1 .
4. Résoudre ces équations dans le cas où l'on lache M_1 et M_2 depuis les positions immobiles $x_1 = l_0 + a$ et $x_2 = 2l_0 + a$, et tracer les solutions. Justifier qu'on puisse appeler ces solutions le mode symétrique du système.
5. Résoudre ces équations dans le cas où on lache M_1 et M_2 depuis les positions immobiles $x_1 = l_0 + a$ et $x_2 = 2l_0 - a$ et tracer les solutions. Justifier qu'on puisse appeler ces solutions le mode anti-symétrique du système, et justifier pourquoi $\omega_1 > \omega_0$.
6. Résoudre ces équations dans le cas où on lache M_1 et M_2 depuis les positions immobiles $x_1 = l_0 + a$ et $x_2 = 2l_0$. On suppose que $k' \ll k$. On donne les formules $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Quel phénomène voit-on apparaître ? À quelle fréquence ?

<https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso> pour une illustration des 3 régimes.

Exercice 13 : Battements (tiré du test de préselection des IPhOs 2015)

Il est très vivement recommandé de faire cet exercice en utilisant la partie 4.1 du cours sur les oscillateurs couplés, ce qui simplifiera grandement les calculs. C'est absolument crucial, car le QCM requiert de la rapidité et de l'efficacité. Pour la même raison, il est fortement déconseillé d'utiliser directement les résultats des calculs de l'exercice précédent, car en conditions réelles vous n'aurez pas le temps de tout poser aussi exhaustivement. On considère deux points matériels de masse m oscillant sans frottement sur un axe horizontal, les points étant reliés respectivement à des parois fixes par des ressorts idéaux de raideur k et entre eux par un ressort de raideur $k' \ll k$.

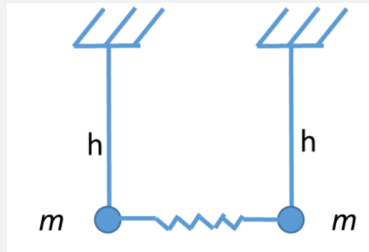


Lorsqu'on observe des battements, que peut-on dire de leur fréquence ?

1. $f = \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{k}{m}}$
2. $f = \frac{1}{4\pi} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{k}{m}}$
3. $f = \frac{1}{2\pi} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{k}{m}}$
4. $f = \frac{1}{4\pi} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice 14 : Pendules couplés (tiré du test de présélection des IPhOs 2017)

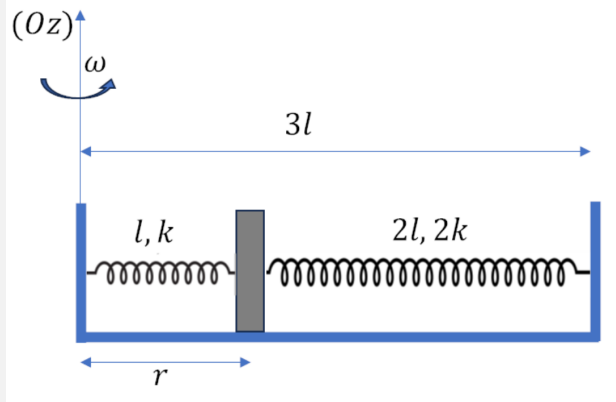
Deux pendules de masse m et de longueur h sont attachés par un ressort de raideur K et de longueur à vide l_0 . La distance entre les deux masses est initialement de l_0 . Quelle est la seule expression possible, pour la fréquence du mode propre de plus haute fréquence ?



1. $\sqrt{\frac{2g}{h} + \frac{2K}{m}}$
2. $\sqrt{\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}}$
3. $\sqrt{\frac{2K}{m}}$
4. $\sqrt{\frac{K}{2m}}$

Exercice 15 : Ressorts et rotation (tiré du test de présélection des IPhOs 2025)

On met en rotation une boîte de longueur $3l$, autour d'un axe noté (Oz) , porté par l'un de ses côtés. La vitesse angulaire de rotation ω est supposée constante. À l'intérieur de cette boîte, on place un bloc de masse m dont on suppose les dimensions caractéristiques négligeables devant l . Ce dernier est relié aux parois par deux ressorts supposés idéaux et sans masse. Sur le schéma ci-dessous, on indique les longueurs à vide et les constantes de raideur de ces deux ressorts. On néglige ici tout type de frottements.

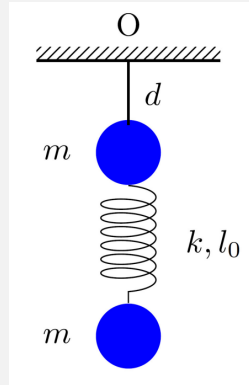


On fait l'hypothèse que le bloc reste à une distance constante r de l'axe de rotation, sans être en contact avec l'un ou l'autre des murs. Quelle est la valeur de r ?

1. $\frac{2kl}{2k - m\omega^2}$;
2. $\frac{2kl}{2k + m\omega^2}$;
3. $\frac{3kl}{3k + m\omega^2}$;
4. $\frac{3kl}{3k - m\omega^2}$;

Exercice 16 : Ressort et mouvement relatif (tiré du test de présélection des IPhOs 2024)

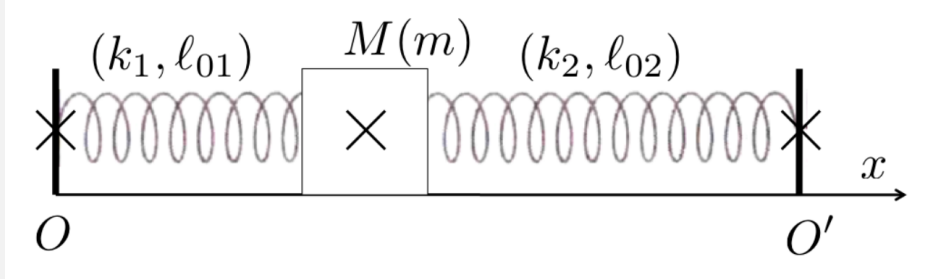
Une masse m est accrochée verticalement à un support en O par un fil de longueur d , dans le champ de pesanteur terrestre g . À cette masse est accroché un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , au bout duquel est accrochée une deuxième masse m . Le système étant initialement à l'équilibre, on coupe le fil juste au dessus de la première masse à l'instant $t = 0$. Comment évolue la longueur du ressort lors de la chute ?



1. $l(t) = l_0 + \frac{k}{mg} \cos(\omega t)$
2. $l(t) = l_0 + \frac{mg}{k} \cos(\omega t)$
3. $l(t) = l_0 - \frac{k}{mg} \cos(\omega t)$
4. $l(t) = l_0 - \frac{mg}{k} \cos(\omega t)$

Exercice 17 : Oscillateur à deux ressorts (tiré du test de présélection des IPhOs 2024)

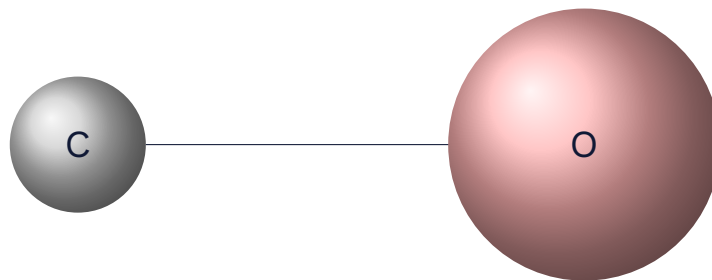
Une masselotte M (de masse m) assimilée à un point matériel est accrochée entre deux ressorts (de constantes de raideur k_i et de longueurs à vide ℓ_{0i} avec $i = 1$ ou 2) fixés à leurs extrémités aux bâtis en O et O' sur le support. Le mouvement de la masselotte est considéré horizontal et sans frottement. Quelle est la pulsation d'oscillation de ce système ?



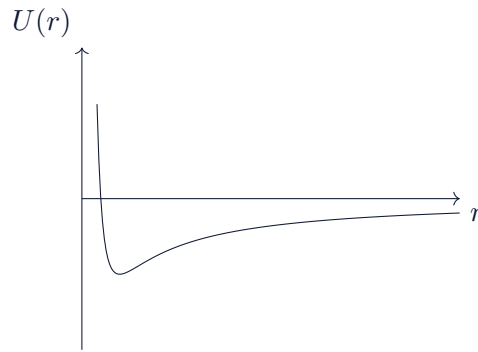
1. $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$
2. $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 \ell_{01} + k_2 \ell_{02}}{\ell_{01} + \ell_{02}}}$
3. $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 \times k_2}{k_1 + k_2}}$
4. $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

Problème 1 : excitation de monoxyde de carbone dans l'air ambiant (tiré du problème 1 du test de présélection des IPhOs 2022, et de l'exercice 1 du test de présélection des IPhOs 2018)

Le monoxyde de carbone CO est un gaz toxique. Il est nocif même à des concentrations très faibles : 30 minutes d'exposition à 0,32% de monoxyde de carbone dans l'air provoque un décès. Il est donc utile de mesurer sa concentration dans l'air avec une grande sensibilité : la méthode de détection de gaz par spectroscopie photoacoustique répond à cette exigence.



On note \vec{r}_C (respectivement \vec{r}_O) le vecteur position du centre de masse de l'atome de carbone (respectivement de l'atome d'oxygène). On note $\vec{r}_G = \frac{m_C \vec{r}_C + m_O \vec{r}_O}{m_C + m_O}$ la position du centre de masse de la molécule. On note $\vec{r} = \vec{r}_C - \vec{r}_O$. Les deux atomes sont liés par une énergie potentielle d'interaction $U(r) = U(\|\vec{r}\|)$ de la forme suivante :



Si vous n'arrivez pas à faire les deux premières questions, ce n'est pas grave, admettez les résultats et passez aux questions suivantes (elles ne sont pas dans le sujet original, les résultats y sont admis).

Données nécessaires à la résolution de ce problème :

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Masses molaires d'éléments : carbone $M(C) = 12,0 \text{ g mol}^{-1}$; oxygène $M(O) = 16,0 \text{ g mol}^{-1}$

1. Montrer que \vec{r}_G est constant. On change donc de référentiel, pour prendre celui où le centre de masse de la molécule est immobile. Justifier que ce nouveau référentiel est galiléen.
2. Montrer que tout se passe comme si une particule de masse $\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O}$ et de position \vec{r} subissait la force exercée par O sur C.
3. Montrer que, tant qu'on s'intéresse à une vibration de petite amplitude au voisinage de la distance moléculaire d'équilibre, on peut assimiler la liaison chimique C-O à un «ressort» de raideur $k = \frac{d^2 U}{dr^2}(r = r_{eq})$ et de longueur au repos $l_0 = r_{eq}$. Quel est alors le mouvement de la particule fictive discutée à la question 2, si on suppose qu'il n'y a aucune rotation ?
Montrer que la distance entre les deux atomes oscille à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.
4. Déterminer la valeur numérique de la masse réduite μ .

L'élongation de la molécule CO par rapport à sa situation d'équilibre est notée $x(t)$. Elle est sinusoïdale, de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$$

avec x_m l'amplitude de l'élongation de la molécule CO.

5. Déterminer les expressions de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} \mu v^2$ et de l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, en fonction de μ , ω_0 , x_m et t . En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de μ , ω_0 et x_m .

Les vibrations de la molécule sont en fait régies par la mécanique quantique et l'énergie mécanique de vibration est quantifiée. Les niveaux d'énergie de vibration de l'oscillateur harmonique quantique sont de la forme :

$$E_n = \frac{h \omega_0}{2\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Avec h la constante de Planck, ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur harmonique classique et $n \in \mathbb{N}$.

Le laser permettant d'exciter la molécule CO dans le cadre de la spectroscopie photoacoustique fait passer la molécule du niveau d'énergie de vibration $n = 0$ au niveau d'énergie de vibration $n = 1$. Sa longueur d'onde est $\lambda = 4,664\mu\text{m}$.

6. Dans quel domaine du spectre électromagnétique émet ce laser ?
7. Déterminer l'expression de l'écart d'énergie entre les niveaux de vibration $n = 0$ et $n = 1$ en fonction de h , c et λ . Faire l'application numérique.
8. En déduire la fréquence propre de vibration f_0 de la molécule. Faire l'application numérique.
9. Calculer la constante de raideur k du ressort équivalent à la liaison C - O dans le monoxyde de carbone.

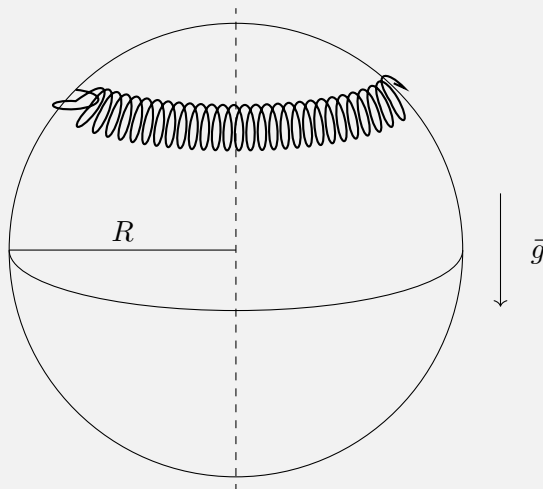
En utilisant le même raisonnement, on peut estimer la constante de raideur k du ressort qui modélise la liaison pour d'autres molécules diatomiques :

Molécule	Constante de raideur (N m^{-1})
F_2	4.4×10^2
O_2	1.1×10^3
N_2	2.2×10^3

10. À quelle caractéristique de la liaison peut être qualitativement liée cette constante de raideur ?
11. Les niveaux d'énergie de vibration peuvent être associés à l'énergie mécanique de la molécule au sens de la mécanique classique (exprimée à la question 5). Quelle est l'amplitude x_m de l'élongation de la molécule lorsque celle-ci est dans son niveau de vibration $n = 1$? Commenter la valeur obtenue, sachant que la longueur de la liaison C - O dans le monoxyde de carbone est $l_0 = 112,8\text{pm}$.

Exercice 18 : Ressort massif sur une sphère (tiré d'un oral X MP 2019)

Un élastique circulaire de masse M , de longueur au repos l_0 et de raideur k est placé autour d'une boule de billard de rayon R , à l'horizontale. Il peut glisser sans frottements sur la boule, tout en restant à l'horizontale.



Déterminer les positions d'équilibre du ressort, et discuter leur stabilité.

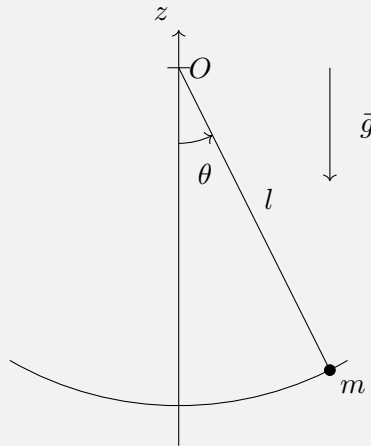
Exercice 19 : Quasi-ressort

On suppose qu'une masse m est soumise à une force de la forme $F(x) = -m\omega_1^2(x - a^4/x^3)$ dans la région $x > 0$.

1. Déterminer la position d'équilibre du système.
2. Discuter sa stabilité, et donner, si elle est stable, la pulsation propre associée.

Exercice 20 : Pendule simple

Il faut bien savoir le faire. On considère une masse m au bout d'un fil de longueur l .



1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. En déduire les positions d'équilibre.
3. Discuter leur stabilité.
4. Déterminer la pulsation propre pour la (les) position(s) stable(s).

Exercice 21 : Formule de Borda

On étudie le mouvement d'un pendule simple de longueur l , de masse m .

1. Déterminer (ou rappeler) l'équation différentielle (1) vérifiée par l'angle $\theta(t)$.
2. La résoudre pour de petites oscillations et en déduire (ou rappeler) la pulsation ω_0 puis la période T_0 du mouvement dans ce cas. A-t-on affaire à un oscillateur harmonique ? Pour une amplitude plus importante, on utilise : $\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6}$ (le DL de sinus à l'ordre 3 en 0). On cherche une solution à l'équation (1) en $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec ω quelconque a priori.

Donnée : $\cos^3(x) = (3 \cos(x) + \cos(3x))/4$

3. Exprimer ω en fonction de ω_0 et θ_0 . On admet que si $\alpha \neq \beta$, et que pour tout t , $a \cos(\alpha t) + b \cos(\beta t) = a' \cos(\alpha t) + b' \cos(\beta t)$, alors $a = a'$ et $b = b'$. En déduire qu'à l'ordre 2 en θ_0 ,

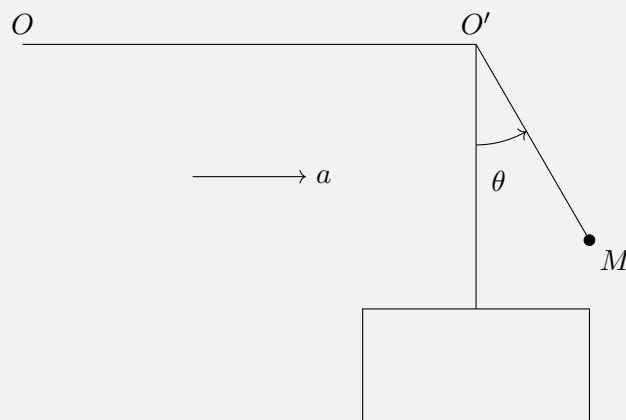
$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

En déduire que l'approximation d'oscillateur harmonique pour le pendule simple est particulièrement efficace.

4. Tracer sur un même graphique l'énergie potentielle réelle dont dérive le poids et l'énergie potentielle parabolisée dont dérive le poids linéarisé utilisé à la question 2. Expliquer physiquement la monotonie de T avec θ_0 .

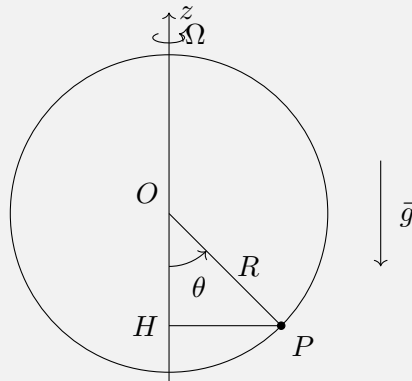
Exercice 22 : Pendule accéléré

Un pendule de masse m et de longueur l est dans un camion. Ce camion a une accélération constante a vers la droite. Déterminer la position angulaire d'équilibre du pendule et la pulsation des petites oscillations.



Exercice 23 : Bille sur un anneau en rotation

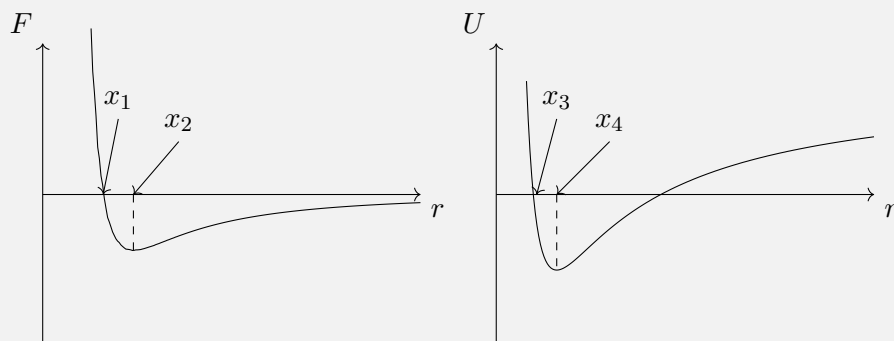
Une bille P de masse m coulisse sans frottements sur un cercle de centre O et de rayon R . Le cercle tourne à la vitesse Ω autour de l'axe fixe (Oz) . On repère par l'angle θ la position de la masse m . On admet que, dans le référentiel de l'anneau (dans lequel l'anneau est immobile, donc tournant à la pulsation Ω), tout se passe comme dans un référentiel galiléen à ceci près qu'une force d'inertie $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \vec{HP}$ s'applique sur P .



1. Quel est le système de coordonnées le plus adapté ?
2. Donner l'équation du mouvement.
3. En déduire les positions d'équilibre. Définir une pulsation critique Ω_c , puis rassembler le tout sur un graphe $\theta_{eq} = f(\Omega)$.
4. Déterminer si les positions d'équilibre sont stables ou non. Rapporter vos résultats sur le graphe. Pourquoi peut-on parler de bifurcation ?

Exercice 24 : Énergie, force, équilibre et stabilité (tiré du test de présélection des IPhOs 2010)

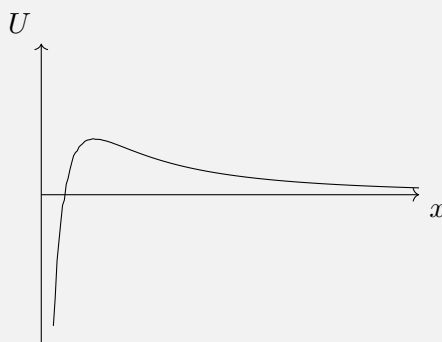
Deux particules distantes de x , sont en interaction. Elles interagissent selon une force F et le potentiel associé U , dont les profils en fonction de x sont les suivants : Quelle situation correspond à la position d'équilibre ?



1. $x_1 = x_3$
2. $x_1 = x_4$
3. $x_2 = x_3$
4. $x_2 = x_4$

Exercice 25 : Énergie et stabilité (tiré du test de présélection des IPhOs 2011)

Deux particules distantes de r interagissent selon un champ de force dont le potentiel a l'allure suivante $U(r)$. Que peut-on en déduire ?



1. Il n'existe pas de position d'équilibre.
2. L'équilibre n'est possible qu'en $r = 0$.
3. Il y a une position d'équilibre stable non nulle.
4. Il y a une position d'équilibre instable non nulle.

Exercice 26 : Force centrale (tiré d'un oral ENS LSR MP 2023)

On considère une particule de masse m soumise à une force :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^n} \vec{u}_r$$

Avec $n \in \mathbb{R}$, O fixe dans un référentiel galiléen et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. On admet que le mouvement est plan (il se fait dans un plan, donc n'est pas un mouvement tridimensionnel).

1. Quel système de coordonnées est le plus adapté ?
2. Donner une condition sur r_0 et $\dot{\theta}_0$, les conditions initiales sur r et θ , pour que le mouvement soit circulaire.
3. On pose $r = r_0 + \delta r$, avec $\delta r \ll r_0$. Établir l'équation différentielle sur δr . Il est pour cela nécessaire d'utiliser les deux équations données par le PFD. On donne la formule :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

4. Conclure quant-à la stabilité de l'orbite circulaire en fonction de n .
5. On choisit cette fois :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \exp(-ar) \vec{u}_r$$

Mêmes questions, orbite circulaire et stabilité.

Vous verrez, dans le cours de mécanique céleste, un moyen beaucoup plus efficace de répondre aux questions de stabilité : l'énergie potentielle effective.

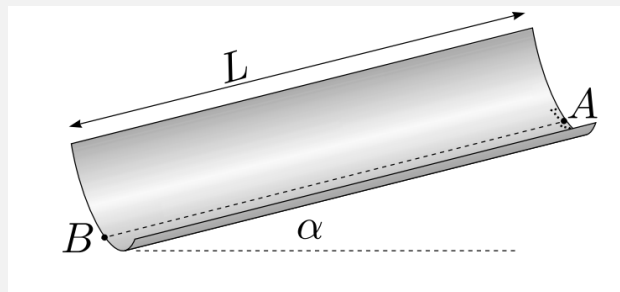
Exercice 27 : Palet flottant

On considère un cube de côté a et de masse volumique $\rho < \rho_{\text{eau}}$ flottant à la surface de l'eau. On rappelle le fonctionnement de la poussée d'Archimède : à l'équilibre dans un fluide, tout corps immergé subit une opposée au poids de fluide déplacé. Décrire le mouvement du cube en faisant des hypothèses judicieuses et discuter quantitativement leur validité.



Exercice 28 : Grains de sable dans un cylindre (tiré de *Problems on mechanics* de Jaan Kalda)

On considère un cylindre de longueur L et de rayon R , incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



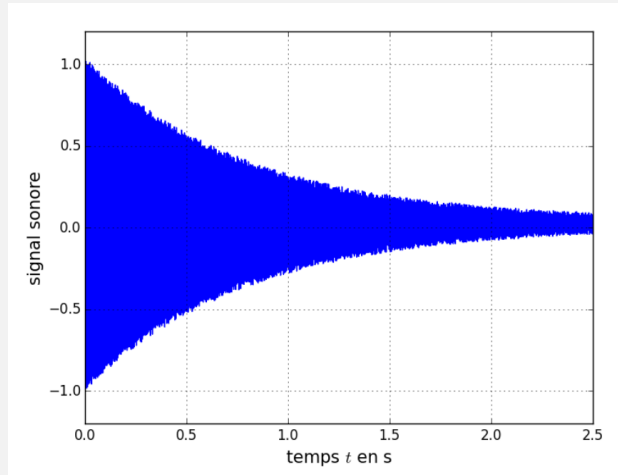
- **Versión brutale** : Si vous voulez traiter l'exo tel qu'il est posé, ne lisez pas la version où l'on a rajouté des questions intermédiaires. Si vous n'y arrivez pas, n'hésitez surtout pas à regarder la deuxième version.

De petits grains de sable glissent sans frottements le long de ce cylindre. Tous les grains ont une vitesse initiale nulle et démarrent proche du point A (mais pas nécessairement au point A exactement). Quelle devrait être la longueur de la rigole pour que tous les grains sortent du cylindre au point B (i.e. exactement en bas de la rigole).

- **Versión aidée** : Une bille peut glisser sans frottements à l'intérieur du cylindre. On la pose tout en haut du cylindre, pas nécessairement en A mais sur le cercle de base du cylindre qui passe par A .
 1. Quel système de coordonnées semble être le plus adapté ?
 2. En déduire les équations du mouvement.
 3. Résoudre les équations du mouvement pour une position initiale proche de A .
 4. On pose, proche de A , une grande quantité de grains de sable. Donner une condition sur L pour que tous les grains de sable sortent du cylindre exactement au point B .

Exercice 29 : L'oscillateur harmonique amorti (tiré du test de présélection des IPhOs 2016)

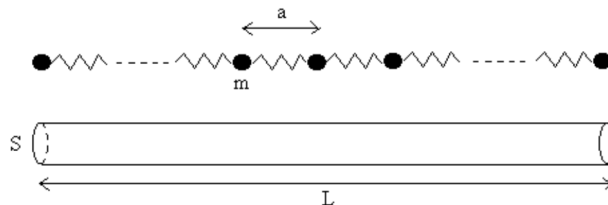
Une guimbarde est un instrument de musique constitué d'une lame de métal que le musicien fait vibrer devant sa bouche ouverte. La figure suivante est l'enregistrement du son produit par la guimbarde, de fréquence 200 Hz. Quel est approximativement le facteur de qualité du système ?



1. 125
2. 1000
3. 10
4. 500

Problème 2 : ondes sonores dans un cristal monoatomique

On se propose d'étudier quelques propriétés physiques des cristaux monoatomiques. Au niveau microscopique, on utilise le modèle simplifié de la chaîne d'atomes monodimensionnelle. On appelle m la masse de l'atome, a la distance entre deux atomes successifs lorsque ceux-ci sont en équilibre; l'interaction entre deux atomes successifs schématisée par des "ressorts" est traduite par une énergie potentielle d'interaction. Au niveau macroscopique, le cristal est un milieu continu de section S , de longueur L et de masse volumique μ .



1. Étude statique

- (i) Écrire pour chacun des modèles la masse par unité de longueur et en déduire que $\frac{m}{a} = \mu S$.
- (ii) L'extrémité de gauche étant fixée dans chacun des modèles, on exerce sur l'extrémité de droite une force d'étirement d'intensité F .

On admet que chacun des ressorts est allongé d'une même quantité notée u si le poids de chaque atome est négligeable devant les forces d'interaction qui s'exercent

entre deux atomes successifs. A partir d'un développement limité de l'énergie d'interaction $E_p(a + u)$, montrer qu'en première approximation $F = Ku$. Comment appelle t'on ce type de force ?

- (iii) Au niveau macroscopique, la version continue de la force d'un ressort est donnée par la loi de Hooke qui relie force et allongement pour des petites déformations d'un solide :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta L}{L}$$

Avec E le module d'Young. Quelle est, dans le système international, l'unité de E ? Montrer que :

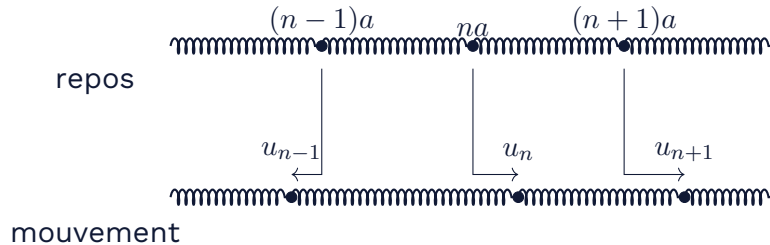
$$\frac{u}{a} = \frac{\delta L}{L}$$

$$\frac{K}{m} = \frac{E}{\mu a^2}$$

A.N. : Calculer K et $\sqrt{\frac{K}{m}}$ pour $E = 2 \times 10^{11} \text{Pa}$, $\mu = 8 \times 10^3 \text{kg m}^{-3}$, $m = 9 \times 10^{-26} \text{kg}$ et $a = 3 \times 10^{-10} \text{m}$ (valeurs typiques pour l'acier). Commenter.

2. Étude dynamique

Lorsque la chaîne est en mouvement longitudinal, chaque atome est repéré par son déplacement $u_n(t)$ par rapport à sa position au repos $x_n = na$ où n entier repère le nième atome de la chaîne. Chaque ressort exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement par rapport à sa longueur a au repos (K : coefficient de proportionnalité). Sur le schéma, u_{n-1} est négatif, et u_n et u_{n+1} sont positifs.



- (i) Montrer que l'équation du mouvement pour les atomes de la chaîne s'écrit :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$$

- (ii) On cherche une solution sous forme d'onde progressive harmonique $u_n = u_0 \sin(\omega t - kna)$ où u_n représente l'élongation, au temps t que prendrait une onde d'amplitude u_0 , de pulsation ω et de vecteur d'onde k ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$), aux points x_n où se trouvent les masses dans la chaîne au repos. On donne les formules $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Montrer que cette solution est possible si :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

quand $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \geq 0$, et que les k tels que $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) < 0$ sont interdits.

- (iii) Représenter la courbe $\omega = f(k)$. Montrer que le mouvement des atomes est inchangé si k est remplacé par $k + 2p\pi/a$ (p entier positif); commenter. Montrer que pour les grandes longueurs d'onde :

$$\frac{\omega}{k} \approx a \sqrt{\frac{K}{m}}$$

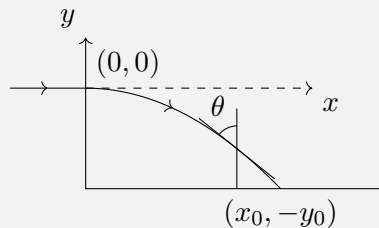
Que se passe-t-il pour des pulsations $\omega > 2\sqrt{K/m}$?

- (iv) Si l'une des masses est remplacée par une masse $m' \ll m$, estimer les changements majeurs attendus sur la distribution en position.
- (v) Décrire qualitativement la forme du spectre en fréquence prévisible pour une chaîne diatomique composée alternativement de masses m et m' .

3 L'oscillateur harmonique partout ailleurs

Exercice 30 : Encore de l'optique (tiré de T2-IPhOs 2015)

Un faisceau laser rentre horizontalement dans une cuve contenant une solution de sucre. Cependant à cause de la décantation, la concentration de sucre diminue avec la hauteur dans la cuve. L'indice optique de la solution décroît donc aussi avec l'altitude.



On suppose que l'indice n ne dépend que de y .

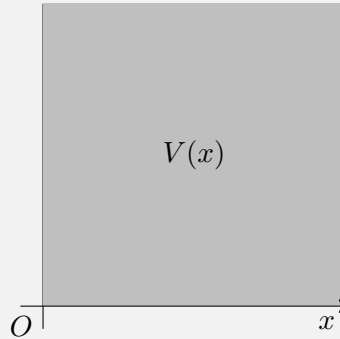
1. Montrer, par un raisonnement infinitésimal, que $n(y) \sin(\theta(y)) = n_0$, avec $\theta(y)$ l'angle d'incidence du rayon le long de sa trajectoire, et n_0 l'indice de réfraction du milieu au point d'entrée du laser.
2. Exprimer la pente $\frac{dy}{dx}$ en un point du rayon lumineux en fonction de $n(y)$ et de n_0 .
3. En considérant que $n(y) = n_0 - ky$, avec $k \geq 0$, exprimer x en fonction de y .
4. En déduire x_0 le point où le laser atteint le fond de la cuve.

On donne la fonction réciproque de cosinus hyperbolique sur \mathbb{R}_+ :

$$\operatorname{argcosh}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$$

Exercice 31 : Principe d'un pH-mètre

On considère une électrode plane au potentiel $V_0 > 0$, plongée dans une solution ionique infinie dans laquelle on trouve des cations de charge Ze et des anions de charge $-Ze$, avec un nombre d'ions par unité de volume en l'absence d'électrode n_0 chacun (pour assurer la neutralité de la solution). On va montrer que la présence de l'électrode va créer une accumulation de charges négatives proche de cette dernière.



L'écriture du théorème de Gauss (ou de l'équation de Maxwell-Gauss, voire même de l'équation de Poisson) ainsi que de la statistique de Maxwell-Boltzmann permet de trouver l'équation différentielle suivante sur V , le potentiel électrique dans la solution en fonction de la position :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{Zen_0}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{ZeV(x)}{k_B T}\right)$$

Où $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

1. Linéariser cette équation à haute température, et donner une condition sur T pour que cette approximation soit valable.
2. En déduire $V(x)$, en utilisant un argument physique pour palier à l'absence d'une deuxième condition initiale, sachant que $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x$ et que l'énergie électrostatique volumique vaut $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Mettre en évidence une distance typique d de variation de V .
3. À quelle condition peut-on considérer le milieu comme infini? Faire l'application numérique pour une solution de 100mL d'acide chlorhydrique à 0.1mol L^{-1} . Commenter.

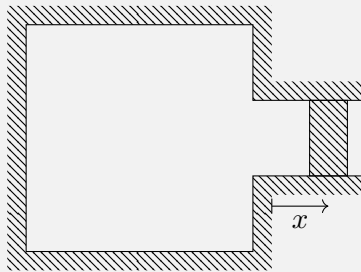
Exercice 32 : De la thermodynamique ?! L'expérience de Rüchardt

Une des constantes les plus importantes pour un gaz parfait est son coefficient de Laplace, noté γ . Il intervient dans les capacités thermiques à volume constant et à pression constante du gaz considéré, et apparaît dans la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{cste}$$

qui est valide dans le cas où ce gaz parfait subit une transformation isentropique, ou plus spécifiquement une transformation adiabatique réversible ; c'est-à-dire une transformation sans transfert thermique, et suffisamment lente pour que l'on puisse considérer que l'équilibre est atteint à tout instant. L'expérience de Rüchardt a pour but de mesurer γ .

On considère une enceinte calorifugée de volume V_0 , dans laquelle on a mis un gaz parfait de coefficient de Laplace γ , de température T_0 , à la pression P_0 . L'embouchure de l'enceinte, de section S , est fermée par un piston, lui aussi calorifugé, de masse m , qui peut glisser sans frottements le long de l'embouchure.



On repère sa position par la coordonnée x , telle que si $x = 0$, $V = V_0$.

1. Déterminer P_0 en fonction de la pression atmosphérique.
2. On appuie légèrement sur le piston, lui donnant une vitesse $\dot{x}(t = 0) = -v_0$, tandis que le piston part de $x = 0$. On suppose la transformation adiabatique (car tout est calorifugé) et réversible (ce qui est valable pour v_0 suffisamment petit). Établir l'équation différentielle de mouvement. Quelle hypothèse peut-on faire sur x ? Proposer une méthode de mesure de γ .

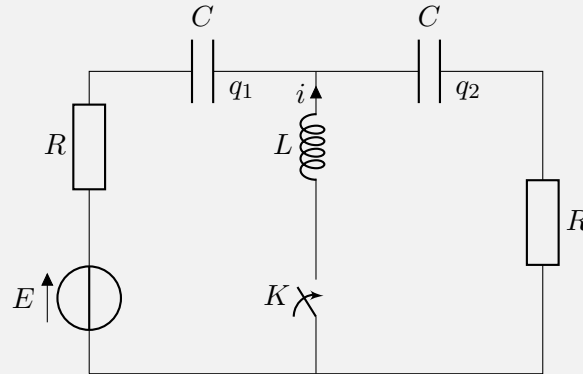
Voici un lien de l'expérience de Rüchardt faite avec de l'air : <https://www.youtube.com/watch?v=vT6n7VVBvqw>

On peut montrer que l'atténuation n'est pas majoritairement due à des frottements solides ou fluides, mais à des transferts thermiques.

Exercice 33 : De l'électrocinétique ? ! L'autre exercice sur l'oscillateur harmonique amorti

Cet exercice demande d'avoir lu le début du bonus 5.1.1 sur la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1 à couplage symétrique.

On considère le circuit électrique suivant :



Les deux condensateurs sont initialement déchargés. On allume alors la source de tension E . On laisse l'interrupteur K ouvert jusqu'à l'instauration d'un régime stationnaire. À $t = 0$, on ferme le circuit. On s'intéresse à l'évolution des charges q_1 et q_2 au cours du temps. On donne $E = 1\text{V}$, $C = 10^{-6}\text{F}$, $R = 2 \times 10^2\Omega$, $L = 5 \times 10^{-3}\text{H}$.

Cette installation conduit aux conditions initiales :

$$\begin{cases} q_1(t = 0^+) = q_2(t = 0^+) = \frac{CE}{2} \\ \left(\frac{dq_1}{dt}\right)_{t=0^+} = -\left(\frac{dq_2}{dt}\right)_{t=0^+} = \frac{E}{2R} \end{cases}$$

Ainsi qu'aux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_1}{dt^2} - \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{LC} q_1 = \frac{E}{L} \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{LC} q_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre ces équations. On introduira une pulsation propre et un facteur de qualité, que l'on calculera.

Exercice 34 : De la mécanique quantique ? Le puits de potentiel infini

On considère une particule de masse m , à une dimension, mise dans une énergie potentielle :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'équation qui régit la fonction d'onde stationnaire d'énergie E est l'équation aux valeurs propres suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Elle ne peut être uniformément nulle, car cela voudrait dire que la particule n'est nulle part.

1. Justifier que la particule est confinée dans $[0, L]$, et qu'elle s'annule en 0 et en L .
2. Résoudre l'équation différentielle sur φ .
3. Utiliser les conditions aux bords pour montrer que E ne peut être négatif ou nul.
4. Utiliser les conditions aux bords pour montrer que l'énergie est quantifiée et ne peut prendre que les valeurs :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

5. Retrouver ce résultat en utilisant un raisonnement purement ondulatoire.

Le raisonnement ondulatoire est à savoir refaire.

Problème 3 : Eau et objets (tiré de Q3-IPhOs 2023)

3.1 Une plaque positionnée verticalement

Une plaque plane est immergée verticalement dans l'eau. Les figures 1(a) et 1(b) montrent respectivement les formes de la surface de l'eau pour des plaques hydrophile (attraction entre son matériau et l'eau) et hydrophobe (répulsion entre son matériau et l'eau). On néglige l'épaisseur de la plaque.

La surface de la plaque est dans le plan yz et la surface horizontale de l'eau loin de la plaque est dans le plan xy (i.e. $z = 0$). La forme de la surface ne dépend pas de la coordonnée y . Soit $\theta(x)$ l'angle entre la surface de l'eau et le plan horizontal en un point (x, z) de la surface de l'eau dans le plan xz . Cet angle $\theta(x)$ est mesuré par rapport à l'axe des x et d'orientation positive dans le sens trigonométrique ; il vaut θ_0 au point de contact entre la plaque et la surface de l'eau ($x = 0$). Dans la suite, θ_0 est fixé par les propriétés du matériau de la plaque.

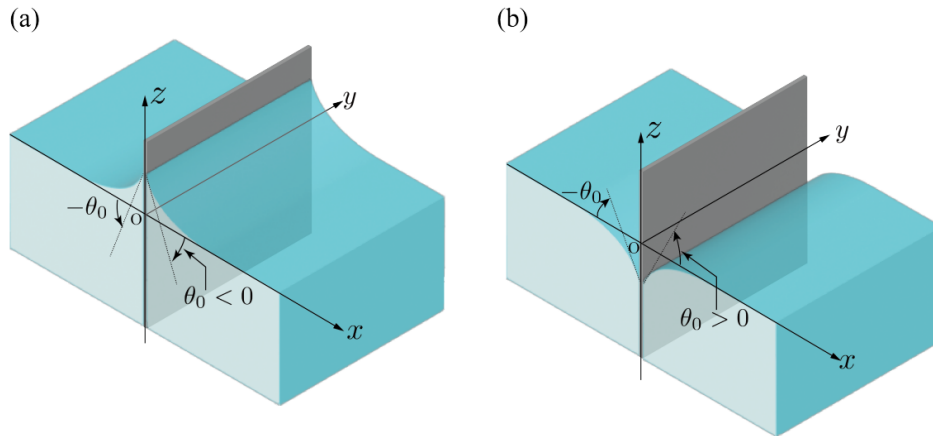
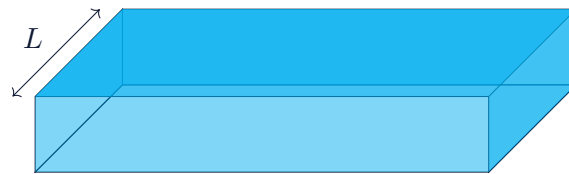


Figure 1 – Plaques immergées verticalement dans l'eau. (a) cas d'une plaque hydrophile ; (b) cas d'une plaque hydrophobe.

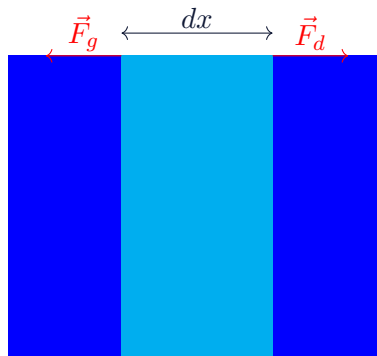
On introduit la tension de surface, une force qui intervient lorsqu'une interface entre un fluide et un corps autre apparaît. On ne peut pas toujours l'exprimer explicitement, mais dans le cas d'une interface invariante selon y sur une longueur L selon cet axe, la tension de surface vaut alors $F = \gamma L$ dans la direction de diminution de la surface de l'interface, avec γ le coefficient de tension superficielle associé à l'interface.

Exemple : surface de l'eau non perturbée

On considère une cuve de longueur a et de largeur L , dans laquelle on a mis de l'eau :



Si l'on prend un coupe de longueur dx :



$\vec{F}_g = -\gamma L \vec{u}_x$ et $\vec{F}_d = \gamma L \vec{u}_x$. Par ailleurs la résultante des forces de pression s'annule par symétrie, la coupe d'eau est donc à l'équilibre mécanique : l'interface plate est une situation stable.

Revenons à notre problème. La masse volumique de l'eau ρ est une constante, ainsi que la tension superficielle de l'eau γ . La constante représentant l'intensité de l'accélération de la pesanteur est notée g . La pression atmosphérique, notée P_0 , est supposée toujours uniforme. Dans la suite, on cherche à déterminer la forme de la surface de l'eau. L'unité de la tension superficielle est aussi bien le J m^{-2} que le N m .

- On considère un bloc d'eau dont la découpe est représentée en grisé sur la figure 2(a). Sa coupe transversale dans le plan xz est précisée par une zone hachurée plus sombre délimitée par des pointillés sur la figure 2(b). Soient z_1 et z_2 les cotes respectives des bords gauche et droit de la surface de ce bloc, à la surface de l'eau (entre le bloc d'eau et l'air). Un peu d'hydrostatique et un calcul d'intégrale permet de montrer que la composante horizontale (selon l'axe x) f_x de la force linéique (i.e. par unité de longueur le long de l'axe y) exercée sur le bloc en raison de la pression vaut :

$$f_x = \frac{1}{2} \rho g (z_2^2 - z_1^2)$$

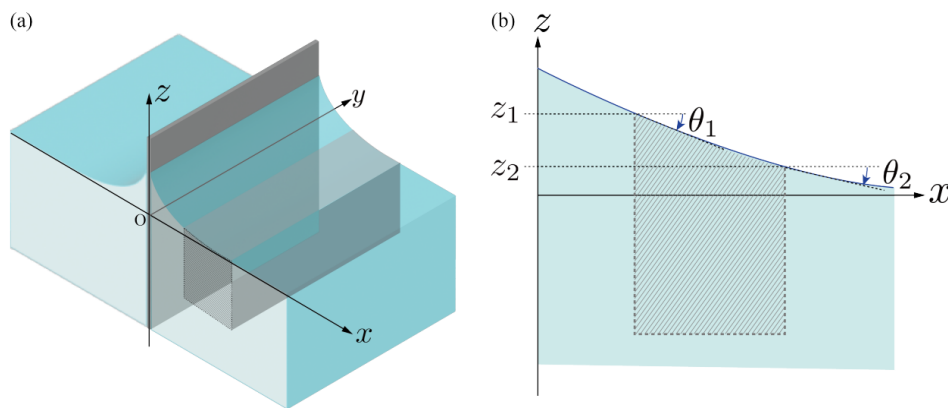


Figure 2 – Forme du bloc d'eau sous la surface de l'eau. (a) Vue tridimensionnelle et (b) vue en coupe.

L'hydrostatique vous permettra également d'expliquer pourquoi P_0 n'intervient pas dans ce résultat. Déterminer l'expression de f_x en fonction γ , θ_1 , et θ_2 .

- Montrer qu'en un point (x, z) quelconque de la surface de l'eau :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{l} \right)^a + \cos(\theta(x)) = \text{constante}$$

Déterminer la valeur de l'exposant a et exprimer la constante l en fonction de γ et ρ . On note que cette équation est valable que la plaque soit hydrophile ou hydrophobe.

- On suppose que les variations de la hauteur de l'eau sont faibles, i.e. $|z'(x)| \ll 1$ (les angles des figures 1 et 2 sont exagérés pour une meilleure lisibilité et ne satisfont donc pas cette condition). En déduire l'équation différentielle satisfaite par $z(x)$. Résoudre cette équation différentielle et déterminer $z(x)$ pour $x \geq 0$ en fonction de $\tan \theta_0$ et l .

3.2 Interaction entre deux tiges

Des tiges identiques A et B, constituées du même matériau, flottent à la surface de l'eau en étant disposées parallèlement et à la même distance de l'axe y (figure 3).

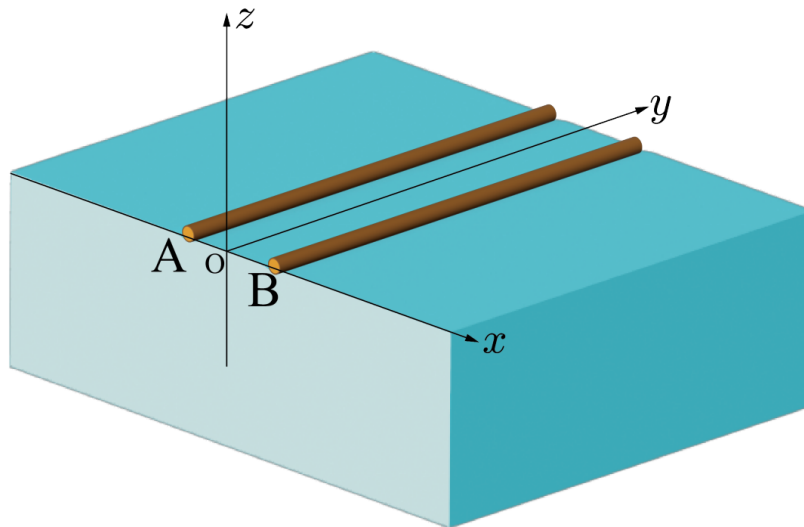


Figure 3 – Deux tiges A et B flottant à la surface de l'eau.

1. Comme le montre la figure 4, on définit les cotes z_a et z_b comme les positions des contacts entre la tige B et la surface de l'eau, ainsi que les angles θ_a et θ_b .

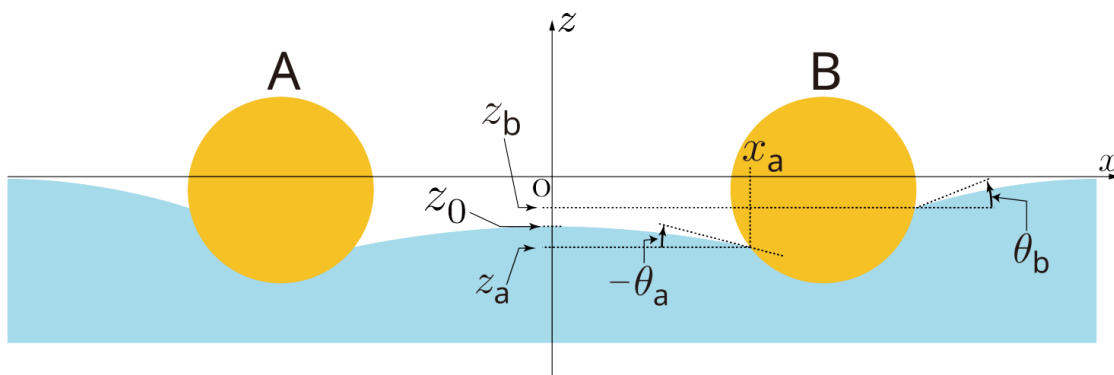


Figure 4 – Vue en coupe verticale des deux tiges flottant à la surface de l'eau.

Soit x_a l'abscisse du point de contact de la tige B avec la surface de l'eau situé le plus à gauche. En utilisant l'équation différentielle obtenue en 3, exprimer la cote z_0 de la surface de l'eau à mi-distance entre les tiges A et B en fonction de x_a et z_a ; il est possible d'utiliser la constante l introduite en 2.